

### Практикалық сабақ №13

Тақырыбы: Бірінші текті беттік интеграл.

Мақсаты: Бірінші текті беттік интегралды есептеу. Бірінші текті беттік интегралдың кейбір қолданылулары.

**Мысал 1.** Бірінші текті беттік интегралды есептеңіз:

$$I = \iint_S (x + y + z) dS,$$

мұндағы  $S = \{(x, y, z) \in R^3 : x^2 + y^2 + z^2 = a^2, z \geq 0\}$ .

**Шешуі:** Интеграл  $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$  теңдеуімен берілген жоғарғы жартылай сфера бойынша алынады.  $S$  жиынының нүктелері үшін

$$z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}, \quad z'_x = -\frac{x}{z}, \quad z'_y = -\frac{y}{z}, \quad z > 0,$$

теңдіктер орындалады, сол себептен

$$dS = \sqrt{1 + z'^2_x + z'^2_y} dx dy = \frac{a dx dy}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}}.$$

Бірінші текті беттік интеграл есептеу формуласын қолданып, аламыз

$$I = a \iint_D \left( \frac{x + y}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}} + 1 \right) dx dy, \quad D = \{(x, y) \in R^2 : x^2 + y^2 < a^2\}.$$

Полярлық координаталарға көшіп, келесі интегралға келеміз

$$I = a \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{a-0} \left( \frac{\rho(\sin \varphi + \cos \varphi)}{\sqrt{a^2 - \rho^2}} + 1 \right) \rho d\rho = \pi a^3,$$

себебі

$$\int_0^{2\pi} (\sin \varphi + \cos \varphi) d\varphi \int_0^{a-0} \frac{\rho^2 d\rho}{\sqrt{a^2 - \rho^2}} = 0.$$

Аудиториялық жұмысы: Бірінші текті беттік интегралды есептеу:  
[8] №№ 4343, 4345, 4348, 4352, 4362.

#### Үй жұмысы

№№ 4344, 4347, 4349, 4355.